



1. Identificación

1.1. De la Asignatura

Curso Académico	2022/2023
Titulación	GRADO EN MATEMÁTICAS
Nombre de la Asignatura	GEOMETRÍA DE RIEMANN
Código	1602
Curso	CUARTO
Carácter	OPTATIVA
N.º Grupos	1
Créditos ECTS	6
Estimación del volumen de trabajo del alumno	150
Organización Temporal/Temporalidad	1 Cuatrimestre
Idiomas en que se imparte	ESPAÑOL
Tipo de Enseñanza	Presencial

1.2. Del profesorado: Equipo Docente

Coordinación de la asignatura JOSE ANTONIO PASTOR GONZALEZ	Área/Departamento	GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA/MATEMÁTICAS
	Categoría	PROFESORES TITULARES DE UNIVERSIDAD
	Correo Electrónico / Página web / Tutoría electrónica	josepastor@um.es https://gravitacion.es Tutoría Electrónica: Sí



Grupo de	Teléfono, Horario y	Duración	Día	Horario	Lugar	Observaciones
Docencia: 1 Coordinación de los grupos:1	Lugar de atención al alumnado	Anual	Martes	16:00- 17:30	868884170, Facultad de Matemáticas y Aulario General B1.-1.012	Esta tutoría se podrá efectuar bien por video conferencia, bien por cita previa.
		Anual	Jueves	16:00- 17:30	868884170, Facultad de Matemáticas y Aulario General B1.-1.012	Esta tutoría se podrá efectuar bien por videoconferencia, bien con cita previa.

2. Presentación

La geometría de Riemann surge históricamente como un intento de generalizar la geometría diferencial de curvas y superficies en el espacio euclídeo, cuyo carácter intrínseco viene dado por la primera forma fundamental. Fue Riemann quien se ocupó de esta tarea asociando a cada punto una forma cuadrática que hace el papel de dicha forma fundamental para superficies y variedades (la generalización de las 2-superficies a n dimensiones) dando origen a lo que hoy conocemos como métricas de Riemann

De esta forma, la materia a estudiar es la generalización natural a dimensión arbitraria de los conceptos estudiados en las asignaturas de tercer curso del Grado de Matemáticas "Geometría de curvas y superficies" y "Geometría global de superficies".

La asignatura está pensada para ser aplicada posteriormente en la optativa Geometría y Relatividad, posiblemente una de las más bellas interacciones entre la Física y las Matemáticas.



3. Condiciones de acceso a la asignatura

3.1 Incompatibilidades

No consta

3.2 Recomendaciones

Haber superado las asignaturas de Tercero de Grado de Geometría.

4. Competencias

4.1 Competencias Básicas

- CB1. Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio
- CB2. Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio
- CB3. Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética
- CB4. Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado
- CB5. Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía

4.2 Competencias de la titulación

- CG1. Ser capaz de expresarse correctamente en español en el ámbito de la Matemática.
- CG2. Comprender y expresarse en un idioma extranjero en el ámbito de la Matemática, particularmente en inglés.
- CG3. Ser capaz de gestionar la información y el conocimiento en el ámbito de la Matemática, incluyendo saber utilizar como usuario las herramientas básicas en TIC.
- CG4. Considerar la ética y la integridad intelectual como valores esenciales de la práctica profesional.
- CG6. Ser capaz de trabajar en equipo y relacionarse con otras personas del ámbito de la Matemática o cualquier otro ámbito.
- CG7. Desarrollar habilidades de iniciación a la investigación.
- CG8. Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar proposiciones en distintos campos de la Matemática, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.
- CG9. Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos en distintas áreas de la Matemática.



- CG10. Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.
- CG11. Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.
- CG12. Capacitar para el aprendizaje autónomo de nuevos conocimientos y técnicas.
- CE1. Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas, planificando su resolución en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos.
- CE3. Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras para experimentar en Matemáticas y resolver problemas.
- CE5. Utilizar herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos.
- CE6. Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas matemáticas

4.3 Competencias transversales y de materia

- Competencia 1. Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de variedad diferenciable.
- Competencia 2. Saber calcular la diferencial de una aplicación diferenciable.
- Competencia 3. Conocer el concepto general de tensor y, en particular, campo de vectores y forma diferencial.
- Competencia 4. Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de variedad riemanniana.
- Competencia 5. Manejar los ejemplos más relevantes, en particular las superficies regulares.
- Competencia 6. Saber calcular el transporte paralelo de un vector.
- Competencia 7. Reconocer curvas que son geodésicas.
- Competencia 8. Conocer el tensor curvatura de riemann y sus propiedades fundamentales.

5. Contenidos

TEMA 1. Variedades diferenciables

Variedad topológica. Variedad diferenciable. Vectores tangentes. Espacio tangente. Covectores y espacio cotangente. Aplicaciones diferenciables. La diferencial de una aplicación. Difeomorfismos. Campos de vectores. Formas diferenciales. Tensores.

TEMA 2. Variedades riemannianas

Tensores métricos. Variedad riemanniana. Conexiones afines. La conexión de Levi-Civita. La derivada covariante. Transporte paralelo. Geodésicas. El tensor curvatura de Riemann. Propiedades. Curvatura seccional, curvatura de Ricci y curvatura escalar. El tensor de Einstein.

TEMA 3. Subvariedades riemannianas

Inmersiones isométricas. Embebimientos isométricos. Subvariedades. Hipersuperficies. Ejemplos. Campos tangentes y campos normales. La conexión inducida. La segunda forma fundamental. La



ecuación de Gauss. Endomorfismo de Weingarten. Fórmula de Weingarten. Hipersuperficies totalmente geodésicas e hipersuperficies totalmente umbilicales. Hipersuperficies minimales.

6. Metodología Docente

Actividad Formativa	Metodología	Horas Presenciales	Trabajo Autónomo	Volumen de trabajo
Clase magistral	<p>Son sesiones donde el profesor expondrá, bien en pizarra, bien con cañón de vídeo, los contenidos teóricos de la asignatura que complementará con ejemplos, ejercicios y aplicaciones que faciliten al estudiante el aprendizaje de la materia. Se facilitará a los estudiantes material escrito donde se incluyan los contenidos (o parte) teóricos, con demostraciones de los resultados expuestos, y ejercicios correspondientes. El estudio previo de dicho material permitirá que el estudiante pueda seguir de forma adecuada y cómoda el desarrollo de la clase. No obstante, las clases magistrales combinarán en su desarrollo explicación del profesor, cuestiones que el profesor propone a los alumnos sobre lo que se está explicando o cuestiones que al alumno le surjan y plantee al profesor.</p>	39	39	78



Actividad Formativa	Metodología	Horas Presenciales	Trabajo Autónomo	Volumen de trabajo
Trabajos dirigidos	Son sesiones donde los estudiantes trabajarán en pequeños grupos, asistidos por el profesor, con tareas, ejercicios o problemas que les sean propuestos, con anterioridad o en el momento. Al final de la clase cada grupo entregará, si el profesor lo considera oportuno, los resultados que haya obtenido o el material que haya elaborado en la sesión de trabajo.	6	12	18
Resolución de problemas	El estudiante deberá resolver por su cuenta, a lo largo del desarrollo de cada capítulo, tanto ejercicios como problemas que propondrá el profesor. Algunos de ellos podrán ser expuestos posteriormente por los propios estudiantes en el aula. Algunos de estos problemas podrán ser entregados por los alumnos por escrito. En estas clases se pondrán en común las ideas y dudas que surjan sobre los ejercicios y problemas. Además, el profesor podrá proponer problemas que el alumno deberá entregar por escrito, en un plazo fijado, para su corrección y evaluación.	8	20	28
Elaboración y exposición de un trabajo	Se le propondrá a cada grupo un tema, dentro del programa de la asignatura, para que lo desarrollen y lo presenten ante el resto de compañeros.	7	19	26
	Total	60	90	150



Actividad Formativa	Metodología	Horas Presenciales	Trabajo Autónomo	Volumen de trabajo

7. Horario de la asignatura

<https://www.um.es/web/estudios/grados/maticas/2022-23#horarios>

8. Sistema de Evaluación

Métodos / Instrumentos	Exámenes (escritos u orales)
Criterios de Valoración	<ul style="list-style-type: none"> • Uso correcto del lenguaje matemático. • Claridad, coherencia y orden de los razonamientos. • Conocimiento y manejo de los diferentes conceptos y resultados matemáticos utilizados. • La correcta interrelación de dichos conceptos y resultados. • La correcta resolución.
Ponderación	50
Métodos / Instrumentos	Informes escritos, trabajos y proyectos
Criterios de Valoración	<ul style="list-style-type: none"> • Asistencia • Uso correcto del lenguaje matemático. • Claridad, coherencia y orden de los razonamientos. • Conocimiento y manejo de los diferentes conceptos y resultados matemáticos utilizados. • La correcta interrelación de dichos conceptos y resultados. • La correcta resolución.
Ponderación	30



Métodos / Instrumentos	Presentación de trabajos
Criterios de Valoración	<ul style="list-style-type: none"> • Asistencia • Uso correcto del lenguaje matemático. • Claridad, coherencia y orden de los razonamientos. • Conocimiento y manejo de los diferentes conceptos y resultados matemáticos utilizados. • La correcta interrelación de dichos conceptos y resultados. • La correcta resolución.
Ponderación	20

Fechas de exámenes

<https://www.um.es/web/estudios/grados/maticas/2022-23#examenes>

9. Resultados del Aprendizaje

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de variedad topológica y diferenciable: inmersiones, campos de vectores, formas diferenciables y tensores.
- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de variedad riemanniana (métrica, conexión) e interpretar ésta como espacio métrico.
- Saber utilizar las expresiones locales en coordenadas para trabajar con las métricas y las conexiones.
- Conocer el tensor curvatura de Riemann y sus propiedades más sencillas, y saber utilizar los diferentes tipos de curvatura.
- Identificar los diferentes espacios modelo y conocer sus principales propiedades

10. Bibliografía

Bibliografía Básica



Introduction to Smooth Manifolds. John M. Lee. Springer. 2000.



Introduction to Riemannian manifolds. John M. Lee. Springer. 2019.



11. Observaciones y recomendaciones

1. Para las convocatorias extraordinarias se distinguirán dos casos: si el alumno ha seguido la evaluación continua durante el curso (realizando los ejercicios y el trabajo), la evaluación se efectuará como en la convocatoria ordinaria; si no ha optado por la evaluación continua, se utilizará como único instrumento de evaluación un examen escrito de preguntas prácticas que puntuará de 0 a 10.

2. Aquellos estudiantes con discapacidad o necesidades educativas especiales podrán dirigirse al Servicio de Atención a la Diversidad y Voluntariado (ADYV; <http://www.um.es/adv/>) para recibir orientación sobre un mejor aprovechamiento de su proceso formativo y, en su caso, la adopción de medidas de equiparación y de mejora para la inclusión, en virtud de la Resolución Rectoral R-358/2016. El tratamiento de la información sobre este alumnado, en cumplimiento con la LOPD, es de estricta confidencialidad.