



UNIVERSIDAD  
DE MURCIA

## 1. Identificación

### 1.1. De la asignatura

|                                   |                                                                                                                                             |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Curso Académico                   | 2024/2025                                                                                                                                   |
| Titulación                        | PROGRAMA ACADÉMICO DE SIMULTANEIDAD DE DOBLE TITULACIÓN CON ITINERARIO ESPECIFICO DE GRADO EN MATEMÁTICAS Y GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA |
| Nombre de la asignatura           | GEOMETRÍA DE CURVAS Y SUPERFICIES                                                                                                           |
| Código                            | 1589                                                                                                                                        |
| Curso                             | CUARTO                                                                                                                                      |
| Carácter                          | OBLIGATORIA                                                                                                                                 |
| Número de grupos                  | 1                                                                                                                                           |
| Créditos ECTS                     | 6.0                                                                                                                                         |
| Estimación del volumen de trabajo | 150.0                                                                                                                                       |
| Organización temporal             | 1º Cuatrimestre                                                                                                                             |
| Idiomas en que se imparte         | Español                                                                                                                                     |

### 1.2. Del profesorado: Equipo docente

**LUCAS SAORIN, PASCUAL**

Docente: PCEO MATE+INFOR\_EXTINCION

Coordinación de los grupos: PCEO MATE+INFOR\_EXTINCION

Coordinador de la asignatura

**Categoría**

CATEDRATICOS DE UNIVERSIDAD

**Área**

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

**Departamento**

MATEMÁTICAS

Correo electrónico / Página web / Tutoría electrónica

#### Teléfono, horario y lugar de atención al alumnado

| Duración: | Día:      | Horario:    | Lugar:                                                        |
|-----------|-----------|-------------|---------------------------------------------------------------|
| A         | Miércoles | 17:00-19:00 | 868884173, Facultad de Matemáticas y Aulario General B1.0.038 |

##### Observaciones:

Será preferiblemente por videoconferencia Zoom. Concertación previa por mensaje privado del aula virtual.

| Duración: | Día:  | Horario:    | Lugar:                                                        |
|-----------|-------|-------------|---------------------------------------------------------------|
| A         | Lunes | 17:00-19:00 | 868884173, Facultad de Matemáticas y Aulario General B1.0.038 |

##### Observaciones:

Será preferiblemente por videoconferencia Zoom. Concertación previa por mensaje privado del aula virtual.

## 2. Presentación

Esta asignatura está dedicada al estudio de la geometría diferencial de curvas y superficies. La historia de la Geometría Diferencial comienza con las curvas: conceptos tales como la tangente a una curva se remontan a Euclides, Arquímedes o Apolonio. Es el propio Euclides quien, en la definición 5 de su famosa obra Elementos, introduce la noción de superficie: "una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura", estableciendo así la idea esencial de que una superficie es un objeto 2-dimensional, es decir, que puede describirse utilizando dos variables independientes. Sin embargo, se podría decir que fueron Euler y Gauss quienes fundaron la teoría de superficies en el espacio tridimensional.

Esta asignatura es el primer contacto que el estudiante tiene con la geometría diferencial, y será importante una buena comprensión de los contenidos que aquí se introducen para poder abordar el resto de asignaturas de geometría diferencial, tanto de carácter obligatorio como optativo, en su caso.

## 3. Condiciones de acceso a la asignatura

### 3.1. Incompatibilidades

No constan

### 3.2. Requisitos

No constan

### 3.3. Recomendaciones

Son necesarios conocimientos de álgebra lineal, cálculo en varias variables y topología (especialmente topología de superficies)

## 4. Competencias

## 4.1. Competencias básicas

- CB1: Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio
- CB4: Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado
- CB5: Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía

## 4.2. Competencias de la titulación

- CG1: Ser capaz de expresarse correctamente en español en el ámbito de la Matemática.
- CG3: Ser capaz de gestionar la información y el conocimiento en el ámbito de la Matemática, incluyendo saber utilizar como usuario las herramientas básicas en TIC.
- CG4: Considerar la ética y la integridad intelectual como valores esenciales de la práctica profesional.
- CG8: Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar proposiciones en distintos campos de la Matemática, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.
- CG9: Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos en distintas áreas de la Matemática.
- CG10: Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.
- CG11: Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.
- CG12: Capacitar para el aprendizaje autónomo de nuevos conocimientos y técnicas.
- CE1: Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas, planificando su resolución en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos.
- CE6: Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas matemáticas

## 4.3. Competencias transversales y de materia

- Saber parametrizar una curva (en el plano o en el espacio) por la longitud de arco, así como calcular su curvatura y torsión
- Saber resolver problemas de caracterización de curvas utilizando el diedro o triedro de Frenet
- Conocer y saber demostrar el teorema fundamental de la teoría local de curvas (en el plano y en el espacio)
- Conocer y saber manejar los conceptos fundamentales de la teoría de superficies: superficie regular, la diferencial, el plano tangente, orientabilidad, la primera y la segunda forma fundamental
- Saber distinguir entre los distintos tipos de curvaturas que se definen en una superficie
- Conocer las diferentes clases de puntos que pueden aparecer en una superficie (elípticos, hiperbólicos, parabólicos, planos y umbilicales)
- Conocer algunas curvas especiales que nos podemos encontrar en una superficie: las líneas de curvatura y las curvas asintóticas

- Saber demostrar y aplicar con precisión uno de los resultados principales de la teoría de superficies: el Teorema Egregium de Gauss

## 5. Contenidos

### 5.1. Teoría

#### Tema 1: Curvas en el plano y en el espacio

**Preliminares:** curvas parametrizadas; longitud de arco; curvas regulares; parametrización por la longitud de arco

**Teoría local de curvas planas:** diedro de Frenet; curvatura con signo; fórmulas de Frenet; teorema fundamental de la teoría local de curvas planas; comparación de una curva con la recta tangente en un punto; comparación de dos curvas tangentes en un punto

**Teoría local de curvas en el espacio:** triedro de Frenet; curvatura y torsión; fórmulas de Frenet; teorema fundamental de la teoría local de curvas

#### Tema 2: Superficies regulares

**Preliminares:** concepto de superficie regular; superficies de nivel; cambios de coordenadas

**Diferenciabilidad:** funciones diferenciables definidas sobre una superficie y propiedades; aplicaciones diferenciables entre dos superficies y propiedades; difeomorfismos entre superficies

**El plano tangente:** curvas diferenciables en una superficie; definición de vector tangente; el plano tangente a una superficie en un punto; la primera forma fundamental

**La diferencial:** la diferencial de una función diferenciable y propiedades; el gradiente de una función diferenciable; puntos críticos; test de la primera derivada para puntos críticos; la diferencial de una aplicación diferenciable entre superficies y propiedades; la regla de la cadena; el teorema de la función inversa

#### Tema 3: Curvatura de una superficie

**Orientación de superficies:** campos de vectores sobre una superficie; superficies orientables; sentido de rotación en una superficie orientada; estructura compleja; bases positivamente orientadas y bases negativamente orientadas

**La segunda forma fundamental:** la aplicación de Gauss de una superficie orientada; imagen esférica; el operador forma o endomorfismo de Weingarten y propiedades; la segunda forma fundamental

**Curvaturas normales:** aceleración de una curva en una superficie; aceleración intrínseca y aceleración extrínseca, propiedades; curvatura normal; secciones normales; relación entre la curvatura normal y la curvatura de la sección normal

**Curvaturas principales** Curvaturas principales y direcciones principales asociadas La fórmula de Euler Líneas de curvatura

**Curvatura de Gauss y curvatura media:** la curvatura de Gauss y la curvatura media como invariantes algebraicos del operador forma; puntos umbilicales; interpretación geométrica; expresión local de las curvaturas de Gauss y media; superficies totalmente umbilicales; caracterización de las superficies totalmente umbilicales

#### Tema 4: Teorema Egregium de Gauss

**Isometrías:** longitud de una curva y primera forma fundamental; geometría intrínseca y geometría extrínseca; isometrías locales; isometrías

**Fórmulas de Gauss y de Weingarten:** expresión local; los símbolos de Christoffel; la fórmula de Gauss; la fórmula de Weingarten

**Las ecuaciones de compatibilidad y el teorema de Gauss:** la ecuación de Mainardi-Codazzi; la ecuación de Gauss; el teorema Egregium de Gauss; isometrías y curvatura de Gauss

**El teorema fundamental de la teoría de superficies:** el teorema de Bonnet

## 5.2. Prácticas

No constan

## 6. Actividades Formativas

| Actividad Formativa                                                            | Metodología                                 | Horas  | Presencialidad |
|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|--------|----------------|
| AF1: Exposición teórica-práctica / Clase magistral de teoría-problemas         | 1.1. Actividades de clase expositiva.       | 40.0   | 100.0          |
|                                                                                | 1.2. Actividades de clase práctica de aula. |        |                |
| AF2: Tutoría ECTS o trabajos dirigidos                                         | 1.1. Actividades de clase expositiva.       | 3.0    | 100.0          |
|                                                                                | 1.2. Actividades de clase práctica de aula. |        |                |
| AF3: Resolución de problemas / Seminarios / Exposición y discusión de trabajos | 1.1. Actividades de clase expositiva.       | 17.0   | 100.0          |
|                                                                                | 1.2. Actividades de clase práctica de aula. |        |                |
| AF5: Trabajo autónomo del estudiante                                           | 1.1. Actividades de clase expositiva.       | 90.0   | 0.0            |
|                                                                                | 1.2. Actividades de clase práctica de aula. |        |                |
| <b>Totales</b>                                                                 |                                             | 150,00 |                |

Esta es una asignatura sin docencia (incluida en un plan de estudios en extinción), por lo que las Actividades Formativas reflejadas en este apartado pueden no corresponderse con las realizadas durante el curso y podrán estar redefinidas en el apartado observaciones.

## 7. Horario de la asignatura

No constan

## 8. Sistemas de Evaluación

| Identificador | Denominación del instrumento de evaluación | Criterios de Valoración                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Ponderación |
|---------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| SE1           | Exámenes (escritos u orales)               | <b>Criterios generales:</b><br><br>1 Precisión y corrección del lenguaje<br><br>2 Claridad, coherencia y orden de los razonamientos<br><br>3 Conocimiento y manejo de los diferentes conceptos y resultados utilizados<br><br>4 Precisa correlación entre dichos conceptos y resultados<br><br>5 Correcta resolución de las cuestiones planteadas<br><br><b>Criterios específicos:</b><br><br>Se indicarán en cada prueba escrita<br><br>Véase el apartado "Observaciones y recomendaciones" para una explicación detallada sobre el cálculo de la nota final | 80.0        |
| SE2           | Informes escritos, trabajos y proyectos    | <b>Criterios generales:</b><br><br>1 Precisión y corrección del lenguaje<br><br>2 Claridad, coherencia y orden de los razonamientos<br><br>3 Conocimiento y manejo de los diferentes conceptos y resultados utilizados<br><br>4 Precisa correlación entre dichos conceptos y resultados<br><br>5 Correcta resolución de las cuestiones planteadas<br><br><b>Criterios específicos:</b><br><br>Se indicarán en cada prueba escrita<br><br>Véase el apartado "Observaciones y recomendaciones" para una explicación detallada sobre el cálculo de la nota final | 20.0        |

Esta es una asignatura sin docencia (incluida en un plan de estudios en extinción), por lo que los Sistemas de Evaluación reflejados en este apartado pueden no corresponderse con los utilizados durante el curso y podrán estar redefinidos en el apartado observaciones.

## 9. Resultados del Aprendizaje

- Manejar con soltura el concepto de curvatura de una curva en  $\mathbb{R}^2$  y saber calcularla
- Manejar con soltura los conceptos de curvatura y torsión de una curva en  $\mathbb{R}^3$  y saber calcularlas
- Tener habilidades y manejar fluidamente los conceptos básicos de la teoría de superficies en  $\mathbb{R}^3$
- Saber calcular la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de una superficie regular
- Entender y reconocer los diferentes puntos de una superficie (en función de sus curvaturas)
- Reconocer algunas curvas distinguidas de una superficie
- Aprender destrezas en el cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie
- Saber demostrar y explicar el teorema Egregium de Gauss

## 10. Bibliografía

### Bibliografía básica

No constan

### Bibliografía complementaria

No constan

## 11. Observaciones

Para estudiantes sin derecho a docencia, la metodología se limita a 150h de trabajo autónomo, y la evaluación al examen final con una ponderación del 100%. No obstante, para facilitar el proceso de aprendizaje, siempre que esto no afecte a los estudiantes que cursan esta asignatura con docencia, los estudiantes sin derecho a docencia podrán seguir las actividades docentes y el sistema de evaluación continua previsto para los estudiantes con derecho a docencia.

### 1 Cálculo de la nota final

La asignatura será evaluada en los términos indicados en el apartado Evaluación

- El 80% se obtendrá con la nota de un control intermedio (30%) y la nota del examen final (50%)
- El 20% se obtendrá con la nota de las tareas que se propondrán a los estudiantes (entre 4 y 6 tareas). Para la evaluación de las tareas, los estudiantes podrán ser citados individualmente por el profesor para comentar los detalles de la resolución
- Se calcularán tres notas: control intermedio (C), tareas entregadas (T) y examen final (E), que se calificarán de 0 a 10 puntos. La calificación final de la asignatura en la modalidad de evaluación continua, en todas las convocatorias del mismo curso académico, será la puntuación  $0,5 \times E + 0,3 \times C + 0,2 \times T$

- El estudiante que no siga la evaluación continua, o que no esté satisfecho con la nota de la evaluación continua, podrá optar por una evaluación global, para lo cual deberá presentarse a una examen global (que será distinto del examen final de la evaluación continua)

## 2 Vinculación con los ODS

Esta asignatura se encuentra vinculada de forma directa con el Objetivo de Desarrollo Sostenible 9 "Industria, Innovación e Infraestructura", en particular con el 95 "Aumento de la investigación científica, capacidad tecnológica"

### NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

Aquellos estudiantes con discapacidad o necesidades educativas especiales podrán dirigirse al Servicio de Atención a la Diversidad y Voluntariado (ADYV - <https://www.um.es/adyv>) para recibir orientación sobre un mejor aprovechamiento de su proceso formativo y, en su caso, la adopción de medidas de equiparación y de mejora para la inclusión, en virtud de la Resolución Rectoral R-358/2016. El tratamiento de la información sobre este alumnado, en cumplimiento con la LOPD, es de estricta confidencialidad.

### REGLAMENTO DE EVALUACIÓN DE ESTUDIANTES

El artículo 8.6 del Reglamento de Evaluación de Estudiantes (REVA) prevé que "salvo en el caso de actividades definidas como obligatorias en la guía docente, si el o la estudiante no puede seguir el proceso de evaluación continua por circunstancias sobrevenidas debidamente justificadas, tendrá derecho a realizar una prueba global".

Se recuerda asimismo que el artículo 22.1 del Reglamento de Evaluación de Estudiantes (REVA) estipula que "el o la estudiante que se valga de conductas fraudulentas, incluida la indebida atribución de identidad o autoría, o esté en posesión de medios o instrumentos que faciliten dichas conductas, obtendrá la calificación de cero en el procedimiento de evaluación y, en su caso, podrá ser objeto de sanción, previa apertura de expediente disciplinario".